



TITLE:

ペットボトル振動子: 水 / 空気流が描き出す時空間構造(非線形現象のモデル化とその数理解析)

AUTHOR(S):

小平, I. 将裕; 北畑, 裕之

CITATION:

小平, I. 将裕 ...[et al]. ペットボトル振動子: 水 / 空気流が描き出す時空間構造(非線形現象のモデル化とその数理解析). 数理解析研究所講究録 2006, 1522: 166-176

ISSUE DATE:

2006-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/58802>

RIGHT:

ペットボトル振動子 ～ 水/空気流が描き出す時空間構造 ～

小平 I. 將裕*, 北畑 裕之¹

財団法人日本宇宙フォーラム,

¹ 京都大学大学院理学研究科物理学教室,

Masahiro I. KOHIRA*, Hiroyuki KITAHATA¹

Japan Space Forum,

¹ *Department of Physics, Graduate School of Science, Kyoto University,*

*e-mail: kohira@jsforum.or.jp

概要

水を入れたペットボトルの口に細管を装着して飲み口を下にすると、下向きの水の流出と上向きの空気の流入が交互に起こる。この現象は、平衡状態から遠く離れた環境で生じる流体の散逸構造としてみる事ができる。そして、細管の内径をコントロールパラメータとすることで分岐現象を観測することができ、振動なし領域・振動領域・空気と水の上下流が同時に起こる対向流領域という3つの領域が観測される。特に、振動領域で観察される振動は振動に強いという特徴を持ち、本発表ではこの領域を基本に議論を進める。また、このシステムを1つの振動子として考え2つの振動子を結合させた場合、その結合様式により同相/逆相の引き込み同調を起こすことができる。これらの実験結果は、この振動子がリミットサイクル振動的な性質を持つことを示している。本発表ではこれらの実験結果を紹介すると共に、現象論的な視点から区分線形性を導入した2階常微分方程式によって現象の本質的挙動が再現できることを示す。

1 イントロダクション

同種の性質を持った要素の集団が相互作用して全体としての秩序が現れる現象を協同現象と呼び、日常的に色々なところでこのような現象が見られる。[1-4] その中でも特に典型的なのは各要素が振動子としての性質を持つ場合であり、蛍の発光 [5] や心筋細胞の同期現象が典型例として知られている。しかし、こうした自然現象の素過程は複雑な化学反応を内在していたり時間的空間的にもミクロな性質を持っていることが多いため、それらの機構を捉えることは決して容易ではな

い。そこで、簡単に実験が行えるようなシンプルな系を構築し、その挙動を解析することが重要になってくる。これによって協同現象の一般的な性質が明らかになると、単に非平衡物理の研究としてだけではなく、生物学、社会学などさまざまな分野に大きなインパクトを与えることが期待される。

本発表では、ペットボトル振動子 [6, 7] と我々が呼ぶ実験系の持つ以下の特徴について述べる。

- 流体を用いた簡単な実験系でリミットサイクル振動的な挙動を示す振動子をつくることができる
- 結合振動子系において、結合様式の違いで同相/逆相を制御することができる
- 現象論に基づいた振動子単体のモデル方程式が区分線形性を持つ2階の常微分方程式で書ける
- モデル方程式は結合振動子系に対してもうまく現象の本質を再現できる

ペットボトル振動子とは、水を入れたペットボトルを逆さにしたときに下向きの水の流れと上向きの空気の流れが交互に起きる状態を指すが、これと似た現象はリサイクルのためにペットボトル容器を洗っている際によく見られる。ただし、その場合には空気と水の上下流が交互に起こったり同時に起こったりするため、安定した周期運動としては認識しにくい。この不安定な挙動は、ペットボトルの飲み口に十分大きな内径を持つ細管がはめられていても同じく確認することができる。逆に細管の内径が十分に小さい場合、ペットボトルをひっくり返した瞬間の重力不安定性によって下向きの水の流出が緩和過程として見られるものの、細管部分での抵抗が大きいいため、鉛直方向の圧力平衡に達した時点で運動は停止してしまう。

細管の内径がこれらの間の条件にあるとき、下向きの水の流出と上向きの空気の流入が交互に起こり、振動現象として観測できる。この振動の大きな特徴は、上下の流れの媒質が水と空気異なるため、流れの切り替わりのポイントで不連続性が生じることである。この振動現象の周期はペットボトル容器内に残存する水位に依存するため、容器内水量の減少に伴う周期の間延びが観測されるが、1周期に対する水の減少が少ないため振動は安定しており、容器を揺すったり流れを一旦止めるなどの摂動に対しても安定である。

つまり、ペットボトル容器に装着する細管の内径をコントロールパラメータとすることで、ペットボトル振動子の挙動を制御できる。そして現象論的観点から、重力不安定性・細管の先端における界面の安定性・流れの慣性・媒質となる流体の粘性・容器の持つ弾性を考慮することでその挙動を議論することができる。

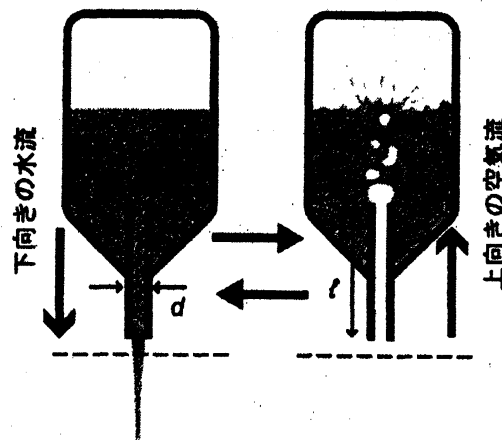


図 1: ペットボトル振動子の模式図. 下向きの水の流出と上向き空気の入りが交互に起こるのが観測される.

2 振動子単体の挙動

まずペットボトル振動子単体の作製方法であるが、コンビニやスーパーで普通に売られているペットボトル容器の飲み口部分にアクリル細管（長さ: l , 100 mm, 内径: d , $2\text{ mm} \leq d \leq 24\text{ mm}$ ）を装着する。容器サイズには様々なものがあるが、ここでは2リットル用のものを使う。必要な物は基本的にはこれだけである。容器を水で満たした後、図1に示すように容器の上下を逆さにし、飲み口を下にする。細管の先端から流出する水の挙動をビデオカメラ（SONY, DCR-TRV18）で撮影し、計算機に取り込んだ後、画像解析ソフト（ImageJ, National Institutes of Health, USA）にて解析を行った。本実験では画像解析による流れの認識を明確にするため数滴の墨汁が水に混ざっているが、これは水の界面張力や粘性を大きく変化させるものではなく、現象の本質的挙動には影響しない。

ペットボトル振動子単体が示す分岐の様子が図2上部の模式図であり、容器飲み口に装着した細管の内径 d をパラメータとした実験データに基づく分岐の相図（図2下部分）と対応している。実験開始時における細管にかかる鉛直方向の静的な圧力の不安定性和その後の挙動に対して、相図に示した3つの領域ごとに考えてみる。まず実験開始時、つまり容器の上下を逆にした瞬間の状態は3領域共に共通している。つまり、下向きに掛かる圧力は水压と容器内部の空気圧であるが、実験開始時の容器内空気圧は細管に対して上向きの圧力となる外気圧と大きさが等しいため、トータルでは必ず下向きの圧力が大きくなる。その結果実験開始時にはまず水の流出による下向き流が生じる。

その後の挙動は各領域によって異なる。相図の左端、振動なし領域（ $d \leq 4\text{ mm}$ ）では、 d が小さすぎるため抵抗による減衰が大きく、慣性による圧力の逆転を引き起こすことができない。その結果、過減衰によって水の流出は圧力平衡点で停止

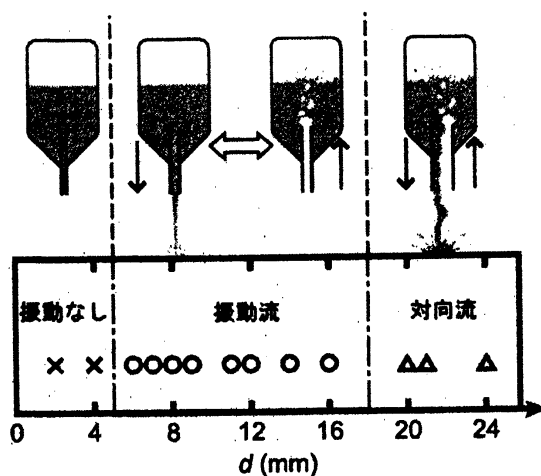


図 2: ペットボトル容器の飲み口部分に装着する細管の内径を変化させて得られる分岐現象. \times , \circ , \triangle 印は実際に実験で各挙動が観察されたポイントを表している.

してしまう。

これに対してもう少し d が大きい場合 ($6 \text{ mm} \leq d \leq 16 \text{ mm}$)、下向きの水流と上向きの空気流が交互に入れ替わる振動モードが観察される。この領域では振動なし領域に比べて細管部分での抵抗が少ないため、水の流出によって圧力平衡に達した時点でも水の慣性が残っており、さらなる水の流出が起こる。そして、その後の減衰によって水流が停止した時点では圧力の向きは逆転しているため、今度は上向きの空気流が引き起こされる。後は水の流出時同様の圧力の向きの逆転が再び起こり、容器内部の水がなくなるまで水と空気の流れが繰り返す。図 3 にこの振動領域における様子を示す。周期の安定性と細管内径に依存した周期の変化が見て取れる。即ち、細管内径が大きくなるにつれて、周期が小さくなる傾向が見られる。この領域における挙動の特徴としては振動に対する強さが挙げられる。水の流出によって徐々に周期の間延びこそ見せるものの、容器を揺すったり凹ませる、さらには細管の先を指で押さえて一旦流れを停止させるなどしても、すぐに元の振動を回復する。そのため、この振動挙動の本質にはリミットサイクル振動的な機構が内在していることが推測できる。

細管の内径 d がさらに大きい場合 ($d \geq 20 \text{ mm}$)、下向きの水流と上向きの空気流が同時に生じ、対向流が絡み合うために安定な挙動が観測できない。この領域および分岐の発現には細管下端の形状や各相の界面張力が大きく影響すると考えられる。

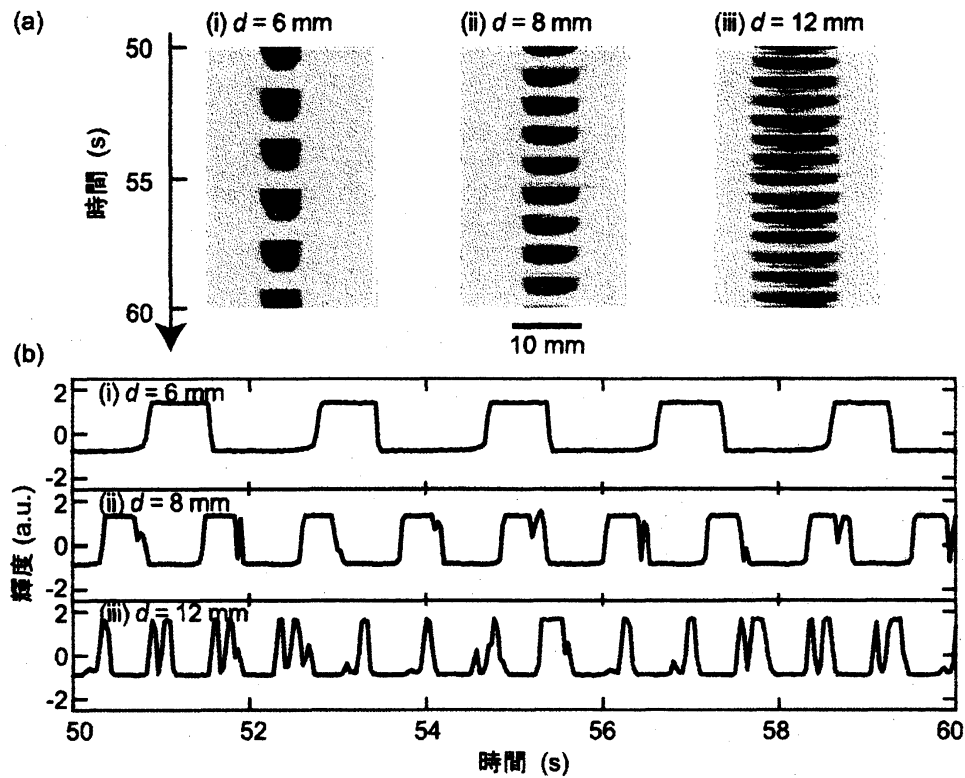


図 3: 振動領域における振動の様子. (a) 細管の下端 3 mm のポイントに引いた水平方向 1 ピクセル分の線分画像 (図 1 中の破線に相当) をつなぎ合わせて作った時空間プロット. 暗い部分が (墨汁で着色した) 下向きの水の流出を表し、明るい部分が上向きの空気の流入を表している. (b) 時空間プロットの中央部の輝度変化から作成した振動の時間変化. 上向きの流れ (明るい部分) が正の値、下向きの流れ (暗い部分) が負の値を持つ. (i)~(iii) は細管内径の違いを表し、(i) 6 mm, (ii) 8 mm, (iii) 12 mm である. 図中の秒数は実験開始時 (容器を逆さにした状態から、水の流出を防ぐためのキャップを外した瞬間) を $t = 0$ とし、その後の時間経過を表す.

3 モデリング

では続いてこれらの実験結果を生み出すペットボトル振動子の機構について考えてみる。ただし前節で示したとおり、細管内径が十分大きな領域で見られる対向流は扱いが難しいため、振動なし領域、振動領域について考える。領域をこの2つに絞ることで、水と空気の流れは層流であると仮定して問題ない。また、精確にペットボトル振動子の特徴を再現しようとするれば、流れの向きによる密度や粘性の非対称性・水の流出に伴う水位の経時変化やペットボトル容器の形状・弾性等を考慮しなくてはならない。しかし本発表においては、ペットボトル振動子単体の実験結果として「流れの向きによる不連続性」「リミットサイクル振動的挙動」「コントロールパラメータの変化による分岐の発現」の3点を本質的挙動として捉え、これらの性質の再現を目指す。そこでまず水位の経時変化による効果を排除するため、容器内の水位が減少していく平均速度 \bar{v} に沿った視点から現象を眺めることにする。つまり鉛直上向きを正として、

$$X = \bar{v}t + x, \quad (1)$$

で表されるような移動座標 x から現象を眺めることにする。こうすることで、振動領域の挙動はリミットサイクル振動“的”ではなく、リミットサイクル振動そのものとして扱うことができる。この座標系に対して、現象論的立場から次のモデル方程式を考える。

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = a \operatorname{sgn} \left(\frac{dx}{dt} \right), \quad (2)$$

ただし‘sgn’は符号関数を表し、

$$\operatorname{sgn}(\beta) = \begin{cases} 1 & (\beta > 0), \\ 0 & (\beta = 0), \\ -1 & (\beta < 0), \end{cases} \quad (3)$$

という性質を持つものとする。式(2)左辺の各項は、それぞれ慣性・粘性・弾性を表している。また各係数については、 m は水の密度、 μ は細管内径の逆数、 ω は容器内空気の圧縮性と容器自体の弾性の効果を足し合わせた意味を持つ。一方、右辺は静的な状態に対する重力不安定性による効果を表しており、係数 a は重力加速度に比例した正の値を持つ。この効果は流れの向きによって不連続に切り替わるため、流れの向きを表す dx/dt を変数に持つ符号関数によって表現されている。現実の系では各係数は様々な値を持つが、まずはモデル方程式の本質を抽出して理解するために、ここではすべて1とする。ただし注目する実験結果である分岐現象について確認するため、細管の内径に関係する μ については変数として残しておく。

図4は式(2)に対する数値計算結果であり、 μ の値によって実験結果の振動なし領域と振動領域のそれぞれに対応する挙動が再現できているのが分かる。 $\mu = 2$ に

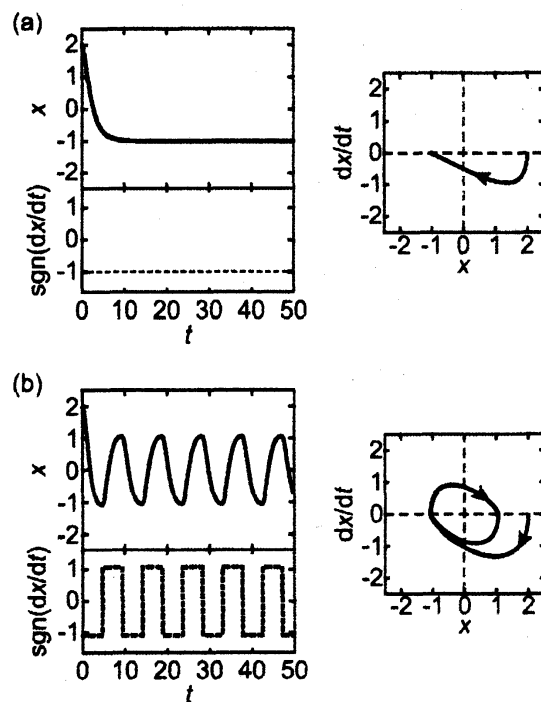


図 4: 幾つかの μ 値 ((a) $\mu = 2.5$, (b) $\mu = 1.5$) に対する式 (2) の数値計算結果. (初期値はいずれも $x = 2.0$, $dx/dt = 0.0$.) (a), (b) の挙動は実験結果の振動なし, 振動領域にそれぞれ対応している. 図の左部分は x および $\text{sgn}(dx/dt)$ の時間変化を表し、右部分が相平面上の軌道を表している. $\text{sgn}(dx/dt) > 0$ が実験での上向き流に対応している.

において周期軌道が出現する分岐が再現できており、特に $0 < \mu < 2$ にある場合のリミットサイクル軌道の出現は、今回注目する実験結果に対する式 (2) の有効性を表している。

4 結合振動子系 ～2 体結合～

式 (2) の有効性は振動子単体に限定されるものではなく、結合系に対しても拡張することができる。結合様式の異なる 2 種類の結合系の実験結果を図 4 に示す。細管の条件によって単体では振動領域に属する 2 つのペットボトル振動子（ただし固有振動数が比較的近いもの）を用意し、お互いの空気層部分を細長いチューブで連結する。チューブ内に何も無いとき（図 5(i)）には 2 つの振動子は同相に同期し、チューブ内に水を溜めてやる（図 5(ii)）と引き込みの安定性が変化して逆相同期が観察される。

結合系に対する実験結果について、式 (2) の拡張として式 (4) を考える。

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \mu \frac{dx_1}{dt} + x_1 - a \operatorname{sgn} \left(\frac{dx_1}{dt} \right) = k(x_2 - x_1), \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \mu \frac{dx_2}{dt} + x_2 - a \operatorname{sgn} \left(\frac{dx_2}{dt} \right) = k(x_1 - x_2). \end{cases} \quad (4)$$

図 6 は式 (4) の数値計算結果である。 k 以外の係数はすべて 1 としている。結合係数 k の正負の符号の変化によって、実験結果に対応する同相/逆相の引き込み同調が再現できている。

5 まとめ

ペットボトル容器、アクリル細管、そして水という誰でもどこでも手に入られる材料を使って、モード分岐とリミットサイクル的振動を生み出す実験系を作製することができた。分岐は容器飲み口に装着するアクリル細管の内径を変化させることでコントロールでき、幅広い範囲で確認される振動モードでは、振動周期が細管内径に依存する傾向が確認できた。またこの振動モードは摂動に対して強く、初期値依存性がないなどリミットサイクル振動的な性質を示した。モデル方程式では、流れの不連続性と重力に対する効果を考慮して区分線形性を導入した 2 階の常微分方程式を用い、細管内径の逆数に相当する変数 μ を変化させることで分岐やリミットサイクル振動を再現した。結合系の実験では、結合様式を変えるだけで水/空気という流体振動の同期モードを制御することができた。振動子単体に対するモデル方程式は結合系に対しても拡張でき、同相/逆相の同期モードを再現した。

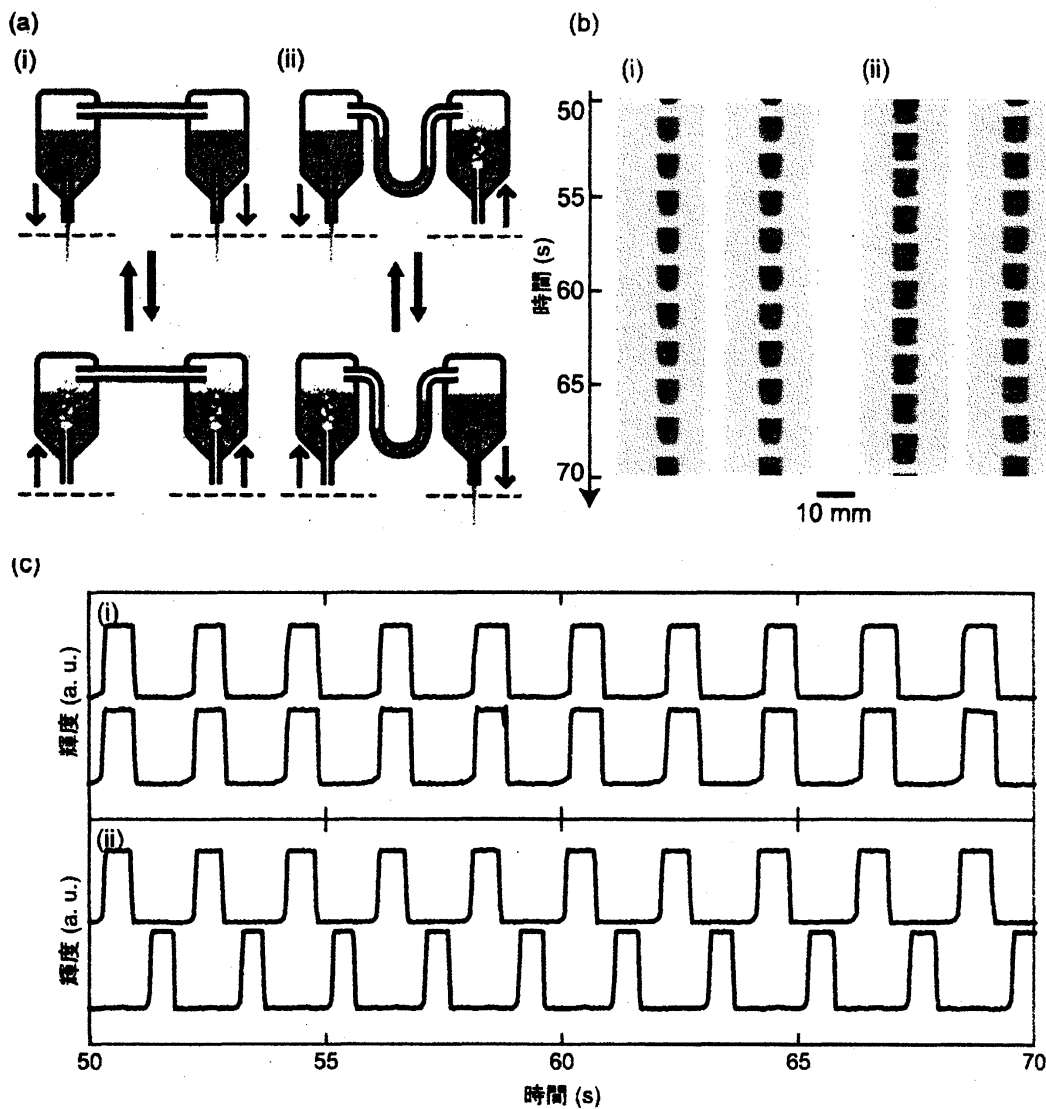


図 5: ペットボトル振動子の結合系に対する実験結果. 結合様式の違いによって別の引き込みモードが現れる. (a) 結合振動子系の模式図. (b) 図 3(a) と同様にして作成した時空間プロット. (c) 時空間プロットの中央部の輝度変化から作成した振動の時間変化. (i) 容器間を単純にチューブ (長さ: 1000 mm, 内径: 8 mm) で繋いだもので、チューブ内に水は入っていない. 2つの振動子の位相はほぼ揃っており、同相同期していることが分かる. (ii) 容器間を繋ぐチューブの長さと同様 (i) と同じだが、10 mL の水が入っている. 2つの振動子間の位相にはほぼ π のズレが生じており、逆相同期していることが分かる. ここで使用しているペットボトル容器は図 2 で使用したものと同じものであり、細管の内径は 6 mm である.

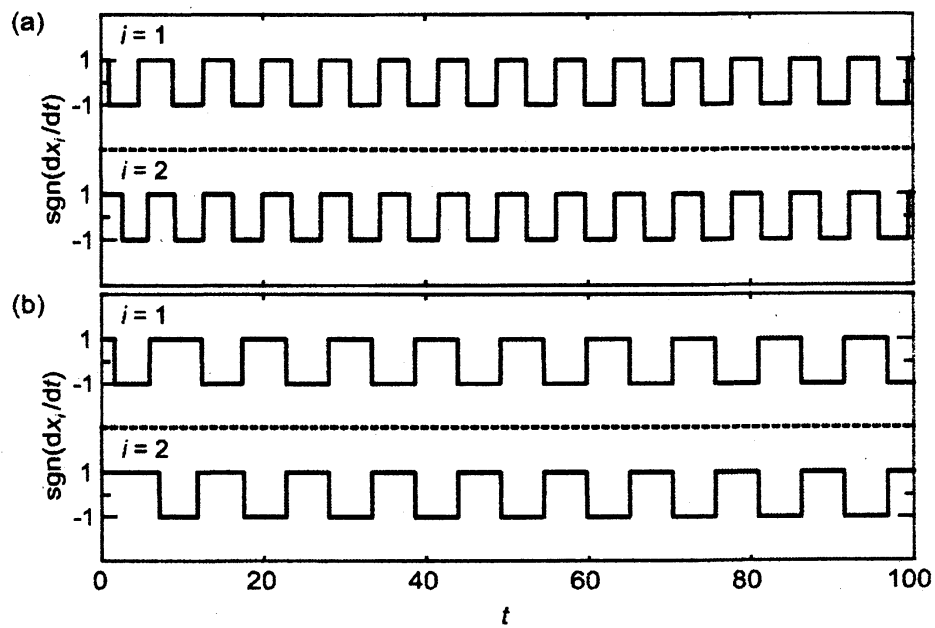


図 6: 結合振動子系に対するモデル方程式の時間変化を表した数値計算結果. 上が $\text{sgn}(dx_1/dt)$ 、下が $\text{sgn}(dx_2/dt)$ の時間変化を表している. (a) では k が正の値 ($k = 0.2$) を持っており、同相同期しているのが分かる. (初期条件は $x_1 = 1.0$, $dx_1/dt = 1.0$, $x_2 = -1.0$, $dx_2/dt = 1.0$) これに対して k が負の値 ($k = -0.2$) を持つ (b) の場合には (a) と同じ初期条件から出発しても逆相に引き込まれていることが分かる.

結合系については今回紹介した2体結合に限らず3体・4体とどんどん拡張することが可能であり、モデル方程式の対応について検証することができる。また、単体のモデル方程式は符号関数部分に強い非線形性を内在するものの、解析可能な形式となっているため、数学的なアプローチによる同期機構の研究についても期待ができる。これらの議論についてはまた別の機会に紹介したい。そして、こうした「手に取れる」非線形実験系の挙動を実験・理論・数値計算の各面から見つめ続けることによってコト的な物の見方 [8] を養い、物理に限らず幅広い世界の見方を考えていければと思っている。

謝辞

本発表内容の主たる部分は講演者が京都大学大学院理学研究科在籍時に吉川研一教授の指導の元に行われたものです。当時も含めて貴重なご意見等をいただいた馬籠信之博士（現名古屋文理短大）、野村 M. 慎一郎博士（現東京医科歯科大学）、相原良一博士（現 West Virginia Univ.）に深く感謝申し上げます。

参考文献

- [1] G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-organization in Nonequilibrium Systems* (Wiley & Sons, New York, 1977).
- [2] H. Haken, *Synergetics* (Springer, Berlin, 1977).
- [3] A. T. Winfree, *The Geometry of Biological Time* (Springer, New York, 1980).
- [4] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
- [5] H. M. Smith, *Science*, **82**, 151 (1935).
- [6] 野村慎一郎, 小平将裕, 大学の物理教育, **2**, 49 (1998).
- [7] 小平将裕, 吉川研一, 化学, **54**, 48 (1999).
- [8] 蔵本由紀, 新しい自然学 (岩波書店, 2003).